# לוגיקה (1) תרגיל 11

1. אקסיומות פאנו. תהי $L = \{\approx, 0, S, +, *\}$ השפה של תורת המספרים. ננסח בשפה $L$ את אקסיומות פאנו ללא אקסיומת האינדוקציה:

(א) $\forall x(0 \not\approx S(x))$.

(ב) $\forall x \forall y(S(x) \approx S(y) \to x \approx y)$.

(ג) $\forall x(x + 0 \approx x)$.

(ד) $\forall x \forall y(x + S(y) \approx S(x + y))$.

(ה) $\forall x(x * 0 \approx 0)$.

(ו) $\forall x \forall y(x * S(y) \approx (x * y) + x)$.

i. הוכיחו כי לכל מודל לאקסיומות הנ"ל קיים שיכון יחיד מתוך המספרים הטבעיים (כלומר מתוך המבנה לשפה $L$ שעולמו המספרים הטבעיים עם הפרוש הרגיל לסימני השפה).

ii. תנו דוגמא למודל לאקסיומות (א)-(ו) כך שהשיכון מהסעיף הקודם אינו על. הסיקו כי האקסיומות (א)-(ו) אינן קטגוריות.

iii. רשות. נסו לתאר (עד כדי איזומורפיזם) את כל המודלים לאקסיומות (א)-(ב) בשפה $\{0, S\}$.

2. שיכונים ותת מבנים. יהיו $\mathfrak{A}$ ו-$\mathfrak{B}$ מבנים לשפה $L$. יהי $H : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ שיכון.

(א) הוכיחו כי הטווח של $H$ סגור תחת הפעולות ב-$\mathfrak{B}$.

(ב) תהי $\varphi(x_1, ... x_n)$ נוסחה בשפה $L$ מהצורה $\exists y_1 \exists y_2 ... \exists y_m \psi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ כאשר $\psi$ נוסחה ללא כמתים. הוכיחו כי לכל $a_1, ..., a_n \in |\mathfrak{A}|$ אם

$$val(\mathfrak{A}, \begin{pmatrix} x_1, ..., x_n \\ a_1, ..., a_n \end{pmatrix}, \varphi(x_1, ..., x_n)) = T$$

אז: $val(\mathfrak{B}, \left(\begin{smallmatrix} x_1, ..., x_n \\ H(a_1), ..., H(a_n) \end{smallmatrix}\right), \varphi(x_1, ..., x_n)) = T$.

(ג) תנו דוגמה לשתי שפות $L \subseteq L'$ ושני מיבנים $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ל-$L'$ כך שכמיבנים ל-$L$, $\mathfrak{A}$ הוא תת מבנה של $\mathfrak{B}$, אך כמבנים ל-$L'$, $\mathfrak{A}$ איננו תת מבנה של $\mathfrak{B}$.

3. תהי $L = \{\approx, 0, 1, +, *\}$ השפה של תורת השדות. נתבונן באקסיומות הבאות ב-$L$:

(א) $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \not\approx x_2 \wedge x_1 \not\approx x_3 \wedge x_2 \not\approx x_3 \wedge \forall y(x_1 \approx y \vee x_2 \approx y \vee x_3 \approx y))$.

(ב) $0 \neq 1$.

(ג) $\forall x \forall y(x + y \approx y + x)$.

(ד) $\forall x \forall y(x * y \approx y * x)$.

(ה) $\forall x(x * 1 \approx x)$.

(ו) $\forall x(x * 0 \approx 0)$.

(ז) $\forall x(x + 0 \approx x)$.

(ח) $1+1 \not\approx 1 \wedge 1+1 \not\approx 0$.

(ט) $\forall x[(x \not\approx 0 \wedge x \not\approx 1) \rightarrow x+1 \approx 0]$.

(י) $\forall x[(x \not\approx 0 \wedge x \not\approx 1) \rightarrow x+x \approx 1]$.

(כ) $\forall x[(x \not\approx 0 \wedge x \not\approx 1) \rightarrow x*x \approx 1]$.

i. הוכיחו כי האקסיומות (א)-(כ) קטגוריות.

ii. האם ניתן לוותר על אחת או יותר מהאקסיומות ובכל זאת לקבל קבוצת אקסיומות קטגורית? (תנו הסבר אין צורך בהוכחה מפורטת).

iii. המודל של האקסיומות הנ"ל (כאמור הוא יחיד עד כדי איזומורפיזם) הוא מבנה מוכר מתחום האלגברה. מהו?